UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2007
MA1116 tercer examen parcial (40%)
11-12-2007

TIPO A1

SOLUCIONES

1.- (12 ptos.) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, halle una base ortonormal para su espacio nulo, $N_A = \{ \mathbf{x} \in R^4 \mid A\mathbf{x} = o \}$.

Solución.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3b \\ -a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(N_A) = 2 ;$$

apliquemos ahora el algoritmo de Gram-Schmidt :

como los dos vectores $\mathbf{v}_1 = (2,-1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3,-2, 0, 1)$ son L.I. y generan N_A, forman una base para N_A;

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / |\mathbf{v}_1| = \mathbf{v}_1/\sqrt{6}$;

$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2.\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (3,-2, 0, 1)) - [\frac{8}{\sqrt{6}} \frac{(2,-1, 1, 0)}{\sqrt{6}}] = \frac{1}{3}(1,-2,-4, 3)$;

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2' / |\mathbf{v}_2'| = \frac{(1,-2,-4, 3)}{|(1,-2,-4, 3|)} = (1,-2,-4, 3) / \sqrt{30}$.

Los dos vectores $\mathbf{u}_1 = \frac{(2,-1, 1, 0)}{\sqrt{6}}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{(1,-2,-4, 3)}{\sqrt{30}}$, forman una base ortonormal para N_A .

2.- (10 ptos.) Sea $T : M_{2x2} \rightarrow R^3$ la función definida por :

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, c, d) ;$$

2a) demuestre que T es una transformación lineal ;

2b) halle la matriz, A_T, asociada a T con las bases naturales;

2c) halle la dimensión, $\nu(T)$, del núcleo de T;

2d) halle la dimensión, $\rho(T)$, de la imagen de T.

2a) Sean **u**= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, **v=** $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$; entonces se tiene : **u**+**v** = $\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}$

T(**u**+**v**)= (a+x, c+z, d+t) = (a, c, d)+(x, z, t) = T(**u**) + T(**v**) ;

$T(\lambda \mathbf{u}) = T(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}) = (\lambda a, \lambda c, \lambda d) = \lambda(a, c, d) = \lambda T(\mathbf{u})$.

2b) Como $T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (1, 0, 0)$, $T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = (0, 0, 0)$,
$T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = (0, 1, 0)$,$T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = (0, 0, 1)$,

y como en la k-ésima columna de la matriz asociada se hallan las componentes de la imagen del k-ésimo vector de la base del dominio, se tiene :

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2c) $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a, c, d) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a=c=d=0$ por lo tanto :
Núcleo(T) = $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a=c=d=0 \} = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\} = \text{gen}\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ y $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ es una base para Núcleo(T) , luego $\nu(T) = 1$.

2d) como $\rho(T)+\nu(T) = \dim(M_{2x2})$, se tiene $\rho(T) = 4 - 1 = 3$;
otra manera de proceder puede ser : todo vector $(x, y, z) \in R^3$ es la imagen de $\begin{bmatrix} x & o \\ y & z \end{bmatrix}$
por lo cual Imagen(T)=R^3 y dim(Imagen(T))=dim(R^3) = 3 .

3.- (12 ptos.) Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

3a) halle los autovalores de A;

3b) halle los autoespacios de A;

3c) Diga si A es diagonalizable; en caso afirmativo halle dos matrices, P, D , tales que $P^{-1}AP = D$ y la matriz D sea diagonal.

Solución. **SOLUCIONES tercer parcial A1**

3a) $|A-\lambda I| = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$ [desarrollando por 4a columna]

$=(3-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda)^2 \;\Rightarrow$

los autovalores son : $\lambda_1=\lambda_2= 2$, $\lambda_3=\lambda_4= 3$ y sus multiplicidades algebráicas : ma(2)=ma(3) = 2

3b) $\lambda= 2 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/2 \\ a+3b/2 \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow\; E_2 = \text{gen}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\} \Rightarrow$ mg(2) = 2 = ma(2) ;

$\lambda= 3 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow\; E_3 = \text{gen}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$;

$\Rightarrow$ mg(3)=2 = ma(3) .

3c) como todos lo autovalores de A son reales y para todos los autovalores de A la multiplicidad algebráica es igual a la multiplicidad geométrica A es diagonalizable;

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4.- (6 ptos.) Demuestre que para toda matriz, A, de tamaño nxn,
las dos matrices A, A^t tienen los mismos autovalores.

Solución.

Como los autovalores son los ceros del polinomio característico, bastará verificar que A y su transpuesta tienen el mismo polinomio catacterístico. En efecto :

$$p_{A^t}(\lambda) = |A^t-\lambda I| \underset{3}{=} |A^t-\lambda I^t| \underset{1}{=} |(A-\lambda I)^t| \underset{2}{=} |A-\lambda I| = p_A(\lambda)\ .$$

(1) $(aH+bK)^t=a(H^t)+b(K^t)$;

(2) $|H^t|=|H|$;

(3) si D es diagonal, entonces $D^t=D$.